Práctica 10 - Cálculo de Enunciados L.

# 1.- Dada la siguiente secuencia de fbfs de L:

1. ((¬p) → (¬(q → r))) → ((q → r) → p)
2. ((¬p) → (¬(q → r)))
3. ((q → r) → p)

Analizar si se trata de una demostración en L de la forma Γ |-L A para algún conjunto Γ de fbfs y alguna fbf A. En ese caso:

1. Describir al conjunto Γ y a la fbf A y explicar cada paso de la secuencia (axiomas y reglas de inferencia).

Γ = {((¬p) → (¬(q → r))) → ((q → r) → p), ((¬p) → (¬(q → r)))}

A = ((q → r) → p)

Demostración sintáctica:

| 1 | ((¬p) → (¬(q → r))) | Hipótesis |
| --- | --- | --- |
| 2 | ((¬p) → (¬(q → r))) → ((q → r) → p) | Hipótesis |
| 3 | ((q → r) → p) | MP entre 1 y 2 |

Llegamos a A a partir del conjunto Γ.

1. Decir si A es teorema de L

Γ es un conjunto vacío

A = ((q → r) → p)

Por las propiedades de Corrección y Completitud, sabemos qué si A es teorema de L también A es una tautología (viceversa también). Se puede hacer la tabla de verdad para ver si A es una tautología y, si lo es, entonces también es un teorema (además hago los dos incisos de una, el menos vago)

| **p** | **q** | **r** | **(q → r)** | **((q → r) → p)** |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| V | V | V | V | V |
| V | V | F | F | F |
| V | F | V | V | V |
| V | F | F | V | V |
| F | V | V | V | V |
| F | V | F | F | V |
| F | F | V | V | V |
| F | F | F | V | V |

Construimos la tabla de verdad y comprobamos que la fbf A no es una tautología, entonces por la propiedad de Corrección, tampoco es un teorema de L.

1. Decir si A es tautología

Ver inciso anterior.

# 2.- Sean A, B y C tres fbfs de L. Dar una demostración sintáctica en L de los siguientes teoremas. Justificar cada paso en la derivación, indicando cuales son los axiomas instanciados y las reglas de inferencia utilizadas. Intente resolverlos sin usar el metateorema de la deducción y luego usándolo.

## i.- |-L ((¬A → A) → A)

### Sin metateorema:

| 1 | ((¬A → A) → (¬A → A)) → (((¬A → A) → (¬A)) → ((¬A → A) → A)) | L2 A = (¬A → A)  B = ¬A  C = A |
| --- | --- | --- |
| 2 |  | L1  A  B |

### Con metateorema:

Γ U {(¬A → A)} |-L A

| 1 | (¬A → A) | Hipótesis |
| --- | --- | --- |
| 2 | (¬A → (¬¬(¬A → A) → (¬A)) | L1  A = ¬A  B = ¬¬(¬A → A) |
| 3 | (¬¬(¬A → A) → ¬A) → (A → ¬(¬A → A)) | L3  A = ¬¬(¬A → A)  B = A |
| 4 | (¬A → (A → ¬(¬A → A)) | SH entre 3 y 4 |
| 5 | (¬A → (A → ¬(¬A → A))) → ((¬A → A) → (¬A → ¬(¬A → A))) | L2  A = ¬A  B = A  C = ¬(¬A → A) |
| 6 | ((¬A → A) → (¬A → ¬(¬A → A))) | MP entre 4 y 5 |
| 7 | (¬A → ¬(¬A → A)) | MP entre 1 y 6 |
| 8 | (¬A → ¬(¬A → A)) → ((¬A → A) → A)) | L3  A = A  B = ¬A → B |
| 9 | ((¬A → A) → A)) | MP entre 7 y 8 |
| 10 | A | MP entre 1 y 9 |

Se probó que |-L ((¬A → A) → A) es un teorema

## ii.- |-L ((A → B) → (¬B → ¬A))

### Sin metateorema:

### Con metateorema:

Γ U {(A → B)} |-L (¬B → ¬A)

| 1 | (A → B) → (¬B → ¬A) | L3  A = ¬A  B = ¬B |
| --- | --- | --- |
| 2 | (A → B) | Hipótesis |
| 3 | (¬B → ¬A) | MP entre 1 y 2 |

# 3.- Sean A, B y C tres fbfs del sistema formal L. Dar una demostración sintáctica en L de las siguientes deducciones. Justificar cada paso en la derivación, indicando cuales son los axiomas instanciados y las reglas de inferencia utilizadas.

## i.- {((A → B) → C), B} |-L (A → C)

| 1 | (B → (A → B)) | L1  A = B  B = A |
| --- | --- | --- |
| 2 | B | Hipótesis |
| 3 | (A → B) | MP entre 1 y 2 |
| 4 | ((A → B) → C) | Hipótesis |
| 5 | C | MP entre 3 y 4 |
| 6 | (C → (A → C)) | L1  A = C  B = A |
| 7 | A → C | MP entre 5 y 6 |

Se llegó a que (A → C) es una demostración de L válida a partir de las premisas Γ.

# 4.- Sea Γ un conjunto de fbfs del C. de Enunciados. Se sabe Γ |-L A. ¿Es cierto que para todo Γi, tal que Γi ⊂ Γ, Γi |-L A?. Fundamentar.

Sea Γ = {q, ¬r} y A = p → q

* A se deduce a partir de Γ

| 1 | q → (p → q) | L1  A = q  B = p |
| --- | --- | --- |
| 2 | q | Hipótesis |
| 3 | p → q | MP entre 1 y 2 |

* Ahora queremos probar que Γi = {¬r}
  + Siendo Γi subconjunto de Γ
* No hay forma que se cumpla que {¬r} |-L (p → q)

Por lo tanto, no es cierto que para todo Γi, tal que Γi ⊂ Γ, Γi |-L A

# 5.- Sean Γ y Γ0 conjuntos de fbfs del C. de Enunciados ¿Es cierto que para todo Γ existe algún Γ0 ⊆ Γ tal que si Γ |-L A entonces Γ0 |-L A?- Fundamentar.

El enunciado nos pregunta sí existe al menos un conjunto Γ0, tal que Γ0 ⊆ Γ y:

* Γ |-L A.
* Γ0 |-L A.

La respuesta es que si, ya que Γ0 puede ser igual que Γ.

* Si Γ0 = Γ y Γ |-L A, entonces Γ0 |-L A.

# 6.- Sean *A, B y C* fbfs del C. de Enunciados. Sea Γ un conjunto de fbfs del C. de Enunciados. Se sabe que Γ U {*A, B*} |-L *C* y también se sabe que Γ |-*L* *A*

## i.- ¿Es cierto que Γ |-*L* (*C* → *B*)?. Fundamentar.

Sean:

* Γ = { q }
* A = (p → q)
* B = { s }
* C = { r → s }

Γ |-*L* *A*:

| 1 | q → (p → q) | L1  A = q  B = p |
| --- | --- | --- |
| 2 | q | Hipótesis |
| 3 | p → q | MP entre 1 y 2 |

Γ U {A, B} |-L C ⇒ q U { (p → q), s } |-L (r → s):

| 1 | s → (r → s) | L1  A = s  B = r |
| --- | --- | --- |
| 2 | s | Hipótesis |
| 3 | r → s | MP entre 1 y 2 |

¿Γ |-L (C → B) ⇒ q |-L ((r → s) → s)?

* Con este Γ y estos B y C, no es posible que C → B se deduzca a partir de Γ
* Por lo tanto, la argumentación es inválida y la afirmación falsa.

## ii.- ¿Es cierto que |-*L* (*A*)?. Fundamentar.

Sean:

* Γ = { q }
* A = (p → q)
* B = { s }
* C = { r → s }

Si A fuera teorema de L, también debería ser una tautología (Sensatez).

¿A es una tautología?

| **p** | **q** | **p → q** |
| --- | --- | --- |
| V | V | V |
| V | F | F |
| F | V | V |
| F | F | V |

* Se construyó la tabla de verdad de A y se comprobó que A no es tautología, por lo tanto, A tampoco es teorema de L.